A Harsányi-program

Pintér Miklós

Kivonat
Ebben a cikkben áttekintjük és rendszerezzük a típusterek irodalmát (Harsányi-program), törekedve mind az intuíciók világos bemutatására, mind a matematikai fogalmak pontos ismertetésére. Következtetésünk világos: az irodalomban kevésbé népszerű tisztán mérhető típusterek a megfelelőek a nem teljes információs szituációk modellezésére.

1. Bevezetés

Az egyik, talán a legfontosabb elvárás a nem teljes információs szituációk modelljeivel szemben az, hogy azok kezelni tudják a játékosok véleményrangsorait, tehát megadják azt, hogy mit gondol egy játékos az adott szituációról, mit gondol arról, hogy a többi játékos mit gondol az adott szituációról, és így tovább a végtelenségig. A véleményrangsorok azonban nem könnyen kezelhető matematikai konstrukciók, így nagyon kívánatos, hogy azok csak rejtetten, nem pedig direkten jelenjenek meg a modellben.

A fent említett probléma, a véleményrangsorok kezelésének bonyolultsága ösztönözte Harsányit is (Harsányi, 1967-68) (163. oldal): „It seems to me that the basic reason why the theory of games with incomplete information has made so little progress so far lies in the fact that these games give rise, or at least appear to give rise, to infinite regress in reciprocal expectations on the part of the players."

Harsányi (1967-68) megoldási javaslata a következő:

(1) Helyettesítsük a véleményrangsorokat típusokkal (166. oldal): „Instead of assuming that certain important *attributes* of the players are determined by some hypothetical random events at the beginning of the game, we may rather assume that the players

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: miklos.pinter@uni-corvinus.hu

themselves are drawn at random from a certain hypothetical population containing the mixture of different ”types”, characterized by different attribute vectors (i.e., by different combinations of relevant attributes).”

(2) Gyűjtsük össze az összes típust egy objektumba, értelmezzünk az objektumon egy valószínűségeloszlást, ami a játékosok véleményét reprezentálja (165. oldal): „As we have seen, if we use the Bayesian approach, then the sequential-expectations model for any given I-game G will have to be analyzed in terms of infinite sequences of higher and higher-order subjective probability distributions, i.e., subjective probability distributions over subjective probability distributions. In contrast, under own model, it will be possible to analyze any given I-game G in terms of one *unique* probability distribution R^* (as well as certain conditional probability distributions derived from R^*).”

Harsányinak ezt a kétlépéses módszerét Harsányi-programnak nevezzük. A Harsányi-program egyes lépéseihez kapcsolódóan egy-egy kérdés merül fel:

(1) Helyettesíthetőek-e a véleményrangsorok típusokkal?
(2) Alkalmas-e a típus fogalma a kitűzött modellezési célok elérésére?

A (2) kérdést előre véve két alkérdést fogalmazhatunk meg:

(2A) Össze lehet-e gyűjteni minden típust egy objektumba?
(2B) Lehet-e a játékosok véleménye tetszőleges valószínűségeloszlás az összegyűjtött típusok objektumán?

A (2A) kérdés az egyetemes típustér fogalmához köthető (Heifetz és Samet, 1998). Az egyetemes típustér egy olyan típustér, amibe minden más típustér egyértelműen „beágyazható”. A (2B) kérdés a típustér teljességéhez kötődik (Brandenburger, 2003). Egy típustér teljes, ha minden benne kifejezhető véleménytípust tartalmaz.

Az (1) kérdésre általában a válasz negatív (Heifetz és Samet, 1999), ha tetszőleges véleményrangsort tekintünk, akkor nem lehet minden véleményrangsort típussal helyettesíteni. Ezért (is) a típustereket (és a véleményrangsorokat) nem általánosan, hanem konkrét megközelítések mentén elemezzük.

A típusterek két fajtája ismert az irodalomban: a topologikus típusterek, ahol a használt fogalmak topológiaiak, és a tisztán mérhető típusterek, ahol a használt fogalmak tisztán mértékelméletiek.[1] Az 1. táblázatban összevetjük a két megközelítés főbb jellemzőit.

A topologikus és a tisztán mérhető modellek különbsége mély, alapvető döntéselméleti kérdéseket érint. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a topologikus modellekben a játékosok kognitív képességei erősebbek (sőt túl erősek), mint a tisztán mérhető modellekben. Tehát már önmagában az a kérdés, hogy mi a jó modellje a játékosok kognitív képességeinek, elvezet a topologikus és a tisztán mérhető modellek közötti választás kérdéséhez.

[1] A két megközelítés vegyíthető, lásd Pintér (2005).

Megközelítés	Tisztán mérhető	Topologikus
Paramétertér	Mérhető tér	Topologikus tér
Világállapotok tere	Mérhető tér	Topologikus tér
Az események osztálya	σ–algebra	Borel σ–algebra
Típusfüggvény	Mérhető függvény	Folytonos függvény
Vélemények	Val. mértékek	Reguláris val. mértékek
Típusmorfizmus	Mérhető függvény	Folytonos függvény

1. táblázat. Típusterek

A típusterek és általában a véleményrangsorok modellezésének egy alapvető kérdése, hogy milyen struktúrát definiáljunk a játékosok véleményeinek halmazán.

Minden típustérben kifejezhetőnek, kimondhatóaknak kell lenni bizonyos alapmondatoknak, azaz bizonyos halmazoknak benne kell lennie a játékosok véleményein értelmezett események osztályában. Nem teljes információs szituációk elemzésekor szükséges olyan mondatok kimondása, hogy egy adott játékos legalább p valószínűséggel hiszi az A esemény bekövetkezését (véleményoperátor (Aumann, 1999)).

Heifetz és Samet (1998) a következőképpen formalizálja ezt az elvárást a tisztán mérhető modellekre:

Legyen $(X,\mathscr{M})$ egy mérhető tér és $\Delta(X,\mathscr{M})$ az $(X,\mathscr{M})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmaza. Ekkor

$$\mathscr{A}^* = \sigma(\{\{\mu \in \Delta(X,\mathscr{M}) : \mu(A) \geq p\},\ A \in \mathscr{M},\ p \in [0,1]\}) \tag{1}$$

a $\Delta(X,\mathscr{M})$ halmazon értelmezett olyan σ-algebra, amely a legszűkebb olyan σ-algebra, ami tartalmazza az alapmondatokat.

A topologikus modellekben nem ilyen egyszerű a vélemények halmazán „jó” struktúrát megadni: legyen (X,τ) egy topologikus tér, és jelölje $B(X,\tau)$ a Borel σ-algebrát (X,τ)-n. Ekkor legyen $(\Delta(B(X,\tau)),\tau_*)$ olyan topologikus tér, hogy tetszőleges $A \in B(X,\tau)$-ra és $p \in [0,1]$-re:

$$\{\mu \in \Delta(B(X,\tau)) : \mu(A) \geq p\} \in B(\Delta(B(X,\tau)),\tau_*)\ . \tag{2}$$

Könnyen látható (Pintér, 2010b), hogy általában nincs olyan τ_* topológia, ami a leggyengébb topológia azok közül, amelyek teljesítik a (2) feltételt. Tehát a tisztán mérhető megközelítéssel ellentétben, a topologikus modellekben a vélemények halmazán a „jó” topológia fogalma nem jól definiált, illetve, úgy is mondhatjuk, hogy nincs „legjobb” topológia.

Mielőtt rátérünk a két modellcsalád részletes ismertetésére, kitérünk a típusterek és a véleményrangsorok jól ismert kapcsolatára. Egy világállapot megadja minden játékosnak az adott típustérhez tartozó véleményrangsorát (Battigalli és Siniscalchi, 1999; Pintér, 2012). Másrészről, megfelelő véleményrangsorokból összerakhatók típusterek (Heifetz és Samet, 1998; Pintér, 2012), mégpedig úgy, hogy az összerakott típustér pontosan az adott véleményrangsorokat tartalmazza. Ezek a tulajdonságok nem megközelítésfüggőek, mind a topologikus, mind a tisztán mérhető megközelítésre igazak.

A cikk felépítése a következő: először rendre megvizsgáljuk a topologikus és a tisztán mérhető típustereket, majd az utolsó fejezetben rövid összegzést adunk.

2. Topologikus típusterek

Ebben a fejezetben a topologikus típusterek fogalmát vezetjük be, és ismertetjük a fogalomhoz köthető fontosabb koncepciókat.

1. Definíció. *Legyen $\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0}$ a világállapotok halmaza. Az (S,τ_S) paramétertérre épülő topologikus típustér $((S,\tau_S),\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0},(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\ \tau_*),g,\{f_i\}_{i\in N})$ egy olyan objektum, hogy*

- *a $g:\Omega\to S$ függvény τ_0-folytonos,*
- *$f_i:\Omega\to(\Delta(B(\Omega,\tau_{-i})),\tau_*)$ az i játékos τ_i-folytonos típusfüggvénye, $i\in N$,*
- *tetszőleges $A\in B(\Omega,\tau_{-i})$ olyan eseményre, hogy létezik $A'\in B(\Omega,\tau_i)$ $\omega\in A'$ és $A'\subseteq A$: $f_i(\omega)(A)=1$, ahol $i\in N$, $\omega\in\Omega$,*
- *$B(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\tau_*)$ teljesíti a (2) tulajdonságot,*

ahol $\tau_\Omega=\vee_{i\in N_0}\tau_i$, $\tau_{-i}=\vee_{j\in N_0\setminus\{i\}}\tau_j$.

A világállapotok Ω halmazának minden pontja a világ egy lehetséges állapotának teljes leírását adja, a τ_i topológia az i játékos informáltságát adja meg, tehát ha pl. $\omega,\omega‘\in\Omega$ két olyan világállapot, hogy azok τ_i-megkülönböztethetetlenek, akkor az i játékos ugyanúgy viselkedik és gondolkodik a két világállapotban; τ_0 a természet informáltságát adja meg.

A g függvény azt mondja meg, hogy az adott világállapotban mi a természet paramétere, másképpen fogalmazva, g a természet típusfüggvénye. Az f_i függvény az i játékos adott világállapotbeli véleményét adja meg. Vegyük észre, hogy ebben a modellben a játékosok ismerik a saját típusukat, tehát a fenti típustér egy Harsányi-típustér (Heifetz és Mongin, 2001).

2. Definíció. *A $\varphi:\Omega\to\Omega'$ τ_Ω-folytonos függvény típusmorfizmus az $((S,\tau_S),\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0},$ $(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\tau_*),g,\{f_i\}_{i\in N})$ és $((S,\tau_S),\{(\Omega',\tau'_i)\}_{i\in N_0},\ (\Delta(B(\Omega',\tau_{\Omega'})),\tau'_*),g',\{f'_i\}_{i\in N})$ topologikus típusterek között, ha*

- *a (3) diagram kommutatív, azaz tetszőleges $\omega\in\Omega$ világállapotra: $g(\omega)=g'\circ\varphi(\omega)$,*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \Omega' \arrow[r, "g'"] & S \end{tikzcd} \tag{3}$$

- *a* (4) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges $i \in N$ játékosra és $\omega \in \Omega$ világállapotra:* $f_i' \circ \varphi(\omega) = \hat{\varphi} \circ f_i(\omega)$,

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\Delta(B(\Omega,\tau_{-i})),\tau_*) \arrow[d, "\hat{\varphi}_i"] \\ \Omega' \arrow[r, "f_i'"] & (\Delta(B(\Omega',\tau'_{-i})),\tau'_*) \end{tikzcd} \tag{4}$$

ahol $\hat{\varphi}_i : (\Delta(B(\Omega,\tau_{-i})),\tau_*) \to (\Delta(B(\Omega',\tau'_{-i})),\tau'_*)$ a következő: tetszőleges $\mu \in \Delta(B(\Omega,\tau_{-i}))$, $A \in B(\Omega',\tau'_{-i})$-re: $\hat{\varphi}(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$.

φ típusizomorfizmus, ha φ homeomorfizmus, és mind φ, mind φ^{-1} típusmorfizmus.

A típusmorfizmus segítségével tudunk típustereket összehasonlítani. Azt mondhatjuk, hogy egy típustér bővebb, mint egy másik, ha létezik típusmorfizmus az utóbbiból az előbbibe.

3. Definíció. *Az $((S,\tau_S),\{(\Omega^*,\tau_i^*)\}_{i\in N_0},(\Delta(B(\Omega^*,\tau_\Omega^*)),\tau_*^*),g^*,\{f_i^*\}_{i\in N})$ topologikus típustér egyetemes topologikus típustér, ha tetszőleges $((S,\tau_S)$, $\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0},(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega))$, $\tau_*)$, $g,\{f_i\}_{i\in N})$ topologikus típustérhez egyértelműen létezik $\varphi : \Omega \to \Omega^*$ típusmorfizmus.*

Az egyetemes típustér a legbővebb típustér, az tartalmazza az összes típust (lásd a (2A) kérdést). Pintér (2010b) megmutatta, hogy nincs egyetemes topologikus típustér, tehát annak ellenére, hogy számos pozitívnak látszó eredmény ismert az irodalomban (Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993; Heifetz, 1993; Mertens et al., 1994; Pintér, 2005), a Harsányi-program nem működik a topologikus megközelítésben.

4. Definíció. *Egy topologikus típustér teljes, ha tetszőleges játékos típusfüggvénye szürjektív.*

Tehát egy topologikus típustér teljes, ha benne minden valószínűségeloszlás típus. Fontos megjegyezni, hogy ugyan nincs egyetemes topologikus típustér, de vannak teljes topologikus típusterek. Tehát annak ellenére, hogy mind az egyetemesség, mind a teljesség valahogy ugyanazt, a típustér bőségét, gazdagságát próbálja megfogni, a két megközelítés nagyon különböző.

Ami a bevezetőben említett (1) kérdést illeti, az irodalomban elemzett topologikus véleményrangsorok (Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993; Heifetz, 1993;

Mertens et al., 1994; Pintér, 2005) helyettesíthetők típussal, tehát a Harsányi-program a topologikus megközelítés esetén nem az (1), hanem a (2) kérdésen bukik el.

3. Tisztán mérhető típusterek

Ebben a fejezetben a tisztán mérhető típustereket és azok tulajdonságait tárgyaljuk.

5. Definíció. *Legyen* $\{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}$ *a világállapotok halmaza. Az* $(S, \mathscr{A})$ *paramétertérre épülő tisztán mérhető típustér egy olyan* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *objektum, hogy*

- *a* $g : \Omega \to S$ *függvény* $\mathscr{M}_0$*-mérhető,*
- $f_i : \Omega \to \Delta(\Omega, \mathscr{M}_{-i})$ *az* i *játékos* $\mathscr{M}_i$*-mérhető típusfüggvénye,* $i \in N$*,*
- *tetszőleges* $A \in \mathscr{M}_{-i}$ *olyan eseményre, hogy létezik* $A' \in \mathscr{M}_i$ $\omega \in A'$ *és* $A' \subseteq A$*:* $f_i(\omega)(A) = 1$*,* $i \in N$*,* $\omega \in \Omega$*,*

ahol $\mathscr{M}_{-i} = \vee_{j \in N_0 \setminus \{i\}} \mathscr{M}_j$*.*

A tisztán mérhető típustér mögött megbújó intuíciók azonosak a topologikus típustereknél tárgyaltakkal. Két technikai különbségre hívjuk fel a figyelmet. Mivel a tisztán mérhető megközelítésben a vélemények halmazán van „legjobb” σ-algebra (lásd $\mathscr{A}^*$-ot (1)-ben), így azt nem is jelöljük külön a tisztán mérhető modellekben. Másodszor, amint említettük a bevezetőben, a topologikus és a tisztán mérhető modellek között az egyik különbség az, hogy a topologikus modellekben több az esemény. Amint azt később látni fogjuk a túl sok esemény okozza a bonyodalmakat.

6. Definíció. *A* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{M}$*-mérhető függvény* ($\mathscr{M} = \vee_{i \in N_0} \mathscr{M}_i$) *típusmorfizmus az* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *és* $(S, \{(\Omega', \mathscr{M}'_i)\}_{i \in N_0}, g', \{f'_i\}_{i \in N})$ *tisztán mérhető típusterek között, ha*

- *az* (5) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges* $\omega \in \Omega$*:* $g' \circ \varphi(\omega) = g(\omega)$*,*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \Omega' \arrow[r, "g'"] & S \end{tikzcd} \tag{5}$$

- *a* (6) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges* $i \in N$ *játékosra* $\omega \in \Omega$ *világállapotra:* $f'_i \circ \varphi(\omega) = \hat{\varphi}_i \circ f_i(\omega)$*,*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Delta(\Omega, \mathscr{M}_{-i}) \arrow[d, "\hat{\varphi}_i"'] \\ \Omega' \arrow[r, "f'_i"] & \Delta(\Omega', \mathscr{M}'_{-i}) \end{tikzcd} \tag{6}$$

ahol $\hat{\varphi}_i : \Delta(\Omega, \mathscr{M}_{-i}) \to \Delta(\Omega', \mathscr{M}'_{-i})$ *a következőképpen definiált: tetszőleges* $\mu \in \Delta(\Omega, \mathscr{M}_{-i})$, $A \in \mathscr{M}'_{-i}$: $\hat{\varphi}_i(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$. *Könnyen látható, hogy* $\hat{\varphi}_i$ *egy mérhető függvény.*

A φ *típusmorfizmus típusizomorfizmus, ha* φ *bijekció és* φ^{-1} *szintén típusmorfizmus.*

A fent definiált fogalom mögötti intuíció teljesen megegyezik a topologikus típusmorfizmusnál tárgyaltakkal. Fontos azonban látni, hogy elképzelhető az, hogy két topologikus típustér között egy függvény tisztán mérhető típusmorfizmus, de nem topologikus típusmorfizmus, sőt az is, hogy két topologikus típustér tisztán mérhető értelemben típusizomorf, de topologikus típusmorfizmussal össze nem vethetőek.

7. Definíció. *Az* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i\in N_0}, g, \{f_i\}_{i\in N})$ *tisztán mérhető típustér egyetemes tisztán mérhető típustér, ha minden* $(S, \{(\Omega', \mathscr{M}'_i)\}_{i\in N_0}, g', \{f'_i\}_{i\in N})$ *tisztán mérhető típustérhez egyértelműen létezik egy* $\varphi : \Omega' \to \Omega$ *típusmorfizmus.*

Heifetz és Samet (1998) mutatta meg, hogy tisztán mérhető típusterek között van egyetemes típustér (lásd még (Pintér, 2012)).

8. Definíció. *Az* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i\in N_0}, g, \{f_i\}_{i\in N})$ *tisztán mérhető típustér teljes, ha tetszőleges* $i \in N$ *játékosra:* f_i *típusfüggvény szürjektív.*

Meier (2001) bizonyította, hogy az egyetemes tisztán mérhető típustér teljes (lásd még (Pintér, 2012)), tehát a tisztán mérhető megközelítésben a bevezetőben feltett (2) kérdésre a válasz pozitív.

Ami a bevezetőben feltett (1) kérdést illeti, itt nem tudunk a részletekbe menni, csak megemlítjük Pintér (2012) eredményét: a tisztán mérhető megközelítés esetén minden véleményrangsor típus.

4. Összegzés

A korábbi fejezetekben tárgyalt eredményeket a 2. és 3. táblázatokban összegezzük.

A következtetés világos és kézenfekvő. Nem az irodalomban elterjedt topologikus, hanem a kevésbé „népszerű” tisztán mérhető megközelítés a megfelelő a nem teljes információs szituációk modellezésére.

	Topologikus megközelítés
(1) kérdés	$\emptyset$ (Pintér, 2010b)
(2) kérdés	✓(Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993) (Heifetz, 1993; Mertens et al., 1994; Pintér, 2005)

2. táblázat. A Harsányi-program I.

	Tisztán mérhető megközelítés
(1) kérdés	✓(Heifetz és Samet, 1998; Meier, 2001)
(2) kérdés	✓(Pintér, 2012)

3. táblázat. A Harsányi-program II.

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-101224 pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

Aumann, R. J. (1999). Interacitve epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory*, 28:301–314.

Battigalli, P., Siniscalchi, M. (1999). Hierarchies of conditional beliefs and interactive epistemology in dynamic games. *Journal of Economic Theory*, 88:188–230.

Brandenburger, A. (2003). On the existence of a 'complete' possibility structure. In: Dimitri, N., Basili, M., Gilboa, I. (szerk.) *Cognitive Processes and Economic Behavior*, Routledge, pp. 30–34.

Brandenburger, A., Dekel, E. (1993). Hierarchies of beliefs and common knowledge. *Journal of Economic Theory*, 59:189–198.

Harsányi, J. (1967-68). Games with incomplete information played by bayesian players, Part I., II., III. *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502.

Heifetz, A. (1993). The bayesian formulation of incomplete information – the non-compact case. *International Journal of Game Theory*, 21:329–338.

Heifetz, A., Mongin, P. (2001). Probability logic for type spaces. *Games and Economic Behavior*, 35(1-2):31–53.

Heifetz, A., Samet, D. (1998). Topology-free typology of beliefs. *Journal of Economic Theory*, 82:324–341.

Heifetz, A., Samet, D. (1999). Coherent beliefs are not always types. *Journal of Mathematical Economics*, 32:475–488.

Meier, M. (2001). An infinitary probability logic for type spaces. *CORE Discussion Papers*, No. 0161.

Mertens, J. F., Sorin, S., Zamir, S. (1994). Repeated games, Part A. *CORE Discussion Papers*, No. 9420.

Mertens, J. F., Zamir, S. (1985). Formulation of bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory*, 14:1–29.

Pintér, M. (2005). Type space on a purely measurable parameter space. *Economic Theory*, 26:129–139.

Pintér, M. (2010a). The existence of an inverse limit of an inverse system of measure spaces – a purely measurable case. *Acta Mathematica Hungarica*, 126(1-2):65–77.

Pintér, M. (2010b). The non-existence of a universal topological type space. *Journal of Mathematical Economics*, 46:223–229.

Pintér, M. (2012). Every hierarchy of beliefs is a type. http://arxiv.org/abs/0805.4007.